D'où vient la loi de distribution lumineuse en $\cos^4\theta$?

Par Emmanuel Bigler

La loi de distribution lumineuse en $\cos^4\theta$ est un modèle qui décrit assez bien ce qui se passe sur un plateau d'agrandisseur éclairé par un objectif classique qui est en général une focale normale, c'est à dire que sa focale est égale à la diagonale du format.

Dans cette situation, focale normale, les rayons les plus inclinés, dans le coin du rectangle, font un angle d'environ 26,5° avec l'axe optique (figure1). En réalité à l'agrandisseur, la distance film-objectif est toujours un peu plus grande que la focale f, parce que l'image n'est pas focalisée à l'infini, cette distance vaut $f(1+1/G)$ où G est le rapport d'agrandissement ; mais basons l'estimation sur une distance égale à la focale f pour simplifier.

L'angle des rayons les plus est inclinés, donc l'angle mesuré entre le côté d'un triangle rectangle de dimensions 1 pour 2 (figure 1) et l'axe optique, cet angle vaut arc $\mathrm{tg}(1/2)$ = 26,5° environ.

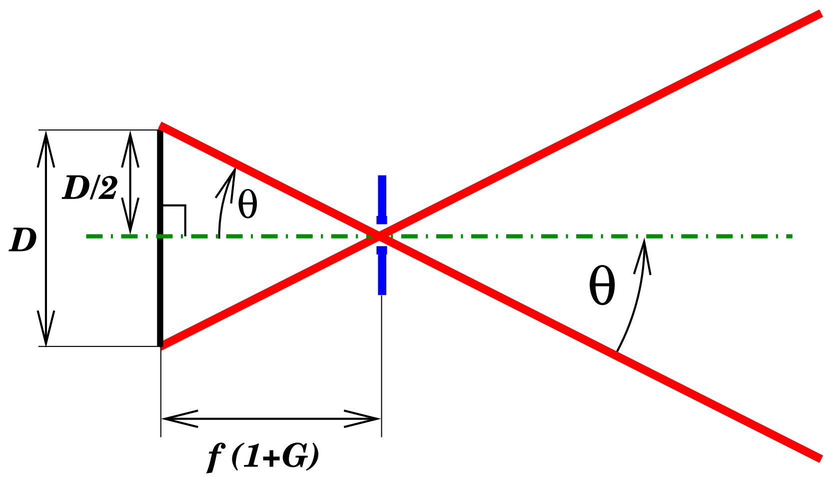

FIGURE 1 – L'angle le plus incliné dans un objectif de focale normale couvrant une diagonale égale à la focale, vaut arc $\mathrm{tg}(1/2)$ = 26,5° environ.

Calculons maintenant la distribution d'éclairement dans l'image d'une source **lambertienne** de luminance L formée par cet objectif. On va supposer pour simplifier que cet objectif est de formule quasi-symétrique, avec ses pupilles dans les plans principaux, donc avec un grandissement pupillaire égal à l'unité (figure 2).

Soit $p = OH$ la distance entre le plan de la source et le point principal objet H de l'objectif (ou point nodal, les points nodaux et les points principaux sont confondus pour une optique travaillant dans l'air), distance mesurée sur l'axe optique. Soit A un point au centre d'un élément de source de surface S, situé hors de l'axe optique. Soit θ l'angle formé par le rayon moyen AH et l'axe optique. Soit r la distance AH entre A et le centre de la pupille d'entrée supposée placée en H pour simplifier. Dans une formule optique parfaitement symétrique, pour que les pupilles soient placées

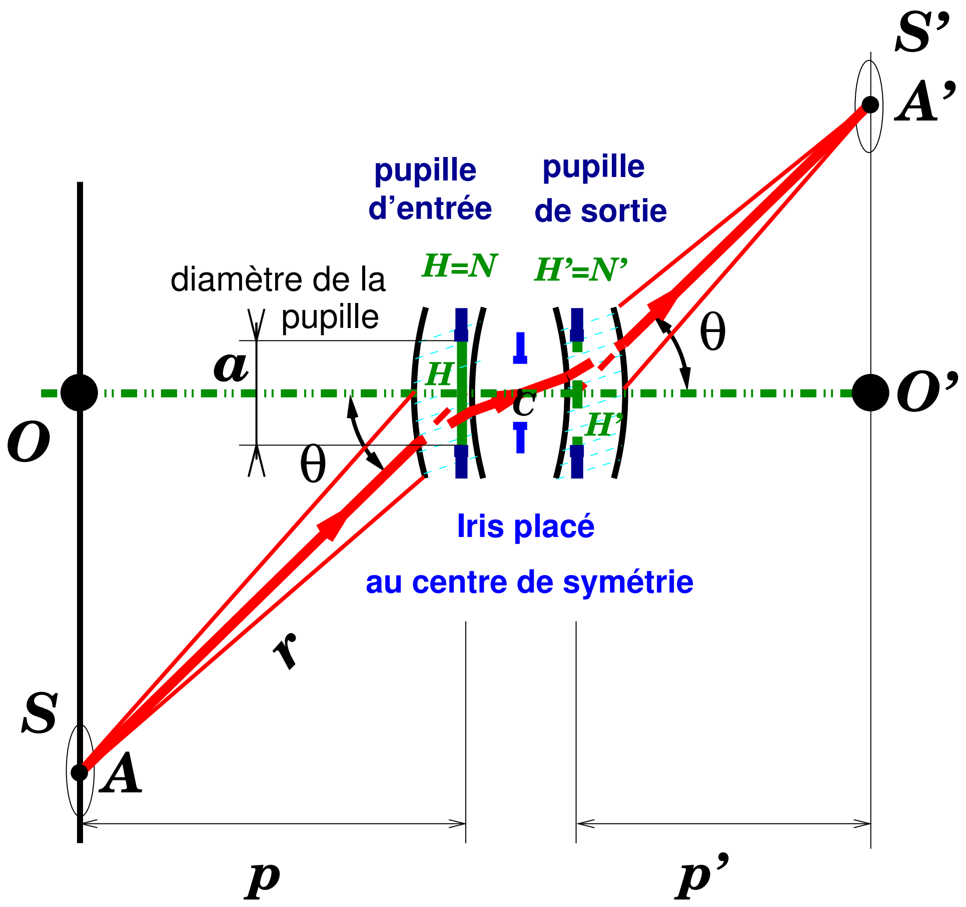

FIGURE 2 – Détermination de l'éclairement en un point hors de l'axe optique, pour une source lambertienne de luminance L et un objectif dont les pupilles sont placées aux plans principaux.

aux plans principaux, il suffit que le diaphragme soit placé au centre de symétrie C (figure 2). Ce qui suppose qu'il y a de l'air au centre de l'objectif, et non pas une lentille !

Cette pupille est supposée circulaire, de diamètre a, de surface $\pi a^2/4$. L'élément de source S se projette sur l'élément d'image de surface S', centré en A', image de A. Compte tenu des propriétés des points principaux (ou nodaux) H et H', l'angle du rayon $H'A'$ en sortie est égal à l'angle θ en entrée.

D'après les propriétés des sources lambertiennes, en supposant que le rapport (a/r) est petit pour simplifier le calcul, le flux lumineux Φ envoyé par cette source dans la pupille s'écrit :

$$\Phi = LS\cos\theta\,(\pi a^2/4)\cos\theta\,\frac{1}{r^2} \tag{1}$$

Dans l'équation (1), le premier cosinus vient de l'inclinaison du rayon moyen AH émis par la source centrée en A, le deuxième cosinus provient de l'inclinaison de la pupille par rapport à ce même rayon.

Dans le triangle rectangle OAH, on a : $\cos\theta = \dfrac{r}{p}$. Le flux Φ émis s'écrit donc, en faisant apparaître la distance $OH = p$:

$$\Phi = L S \cos^4\theta \, (\pi a^2/4) \, \frac{1}{p^2} \tag{2}$$

Il y a donc quatre $\cos\theta$ qui se multiplient dans cette formule (2) :

1. un $\cos\theta$ à cause de l'inclinaison de la source par rapport au rayon moyen ;
2. un deuxième $\cos\theta$ à cause de l'inclinaison de la pupille d'entrée par rapport au rayon moyen ;
3. et un $\cos^2\theta$ à cause du carré de la distance $\frac{1}{r^2}$.

A' étant l'image de A, le grandissement $G = (0'A')/(OA))$ est égal au rapport des distances p'/p. Ce grandissement G, élevé au carré, s'applique également au rapport des surfaces, on a : $S'/S = (p'/p)^2$.

Par définition, l'éclairement E reçu en A' est égal au flux Φ' transmis par l'objectif, divisé par l'élément de surface S' (bien noter que dans la définition de l'éclairement il n'y a pas de multiplication par un facteur cosinus supplémentaire). On suppose que l'objectif absorbe éventuellement un peu de lumière, absorption caractérisée par un coefficient de transmission T. Le flux en sortie Φ' est donc, au facteur multiplicatif T près, le même qu'en entrée :

$$E = \frac{\Phi'}{S'} = T\,L(\pi a^2/4)\,\frac{1}{p^2}\,\frac{S}{S'}\cos^4\theta = T\,L(\pi a^2/4)\,\frac{1}{p'^2}\cos^4\theta \tag{3}$$

Appelons $E_0 = T\,L(\pi a^2/4)\,\frac{1}{p'^2}$ l'éclairement sur l'axe au point O' ; en remplaçant p' en fonction du grandissement G, $p' = f(1+G)$ et en introduisant le **nombre d'ouverture** de l'objectif qui est le rapport entre la distance focale f et le diamètre de pupille d'entrée a, $N = \frac{f}{a}$, on a finalement :

$$\boxed{E_0 = \pi\,T\,L\,\frac{1}{4N^2}\,\frac{1}{1+G^2}} \tag{4}$$

$$\boxed{E = E_0\cos^4\theta} \tag{5}$$

Dans l'équation (4), le terme $(1+G)^2$ est le terme d'atténuation de l'éclairement en fonction de la distance p', ou *facteur de soufflet*. Dans l'équation (5), la dépendance en $\cos^4\theta$ dès qu'on s'éloigne de l'axe est caractéristique des optiques quasi-symétriques, que ce soient des optiques de prise de vue ou des optiques d'agrandisseur. Cette loi s'applique assez bien, du moment que l'objectif est fermé avec un petit diaphragme. À pleine ouverture, la chute d'éclairement en bord de champ est plus rapide que lorsque l'objectif est diaphragmé.

Dans le cas d'une focale normale, ou d'un objectif d'agrandisseur, la chute de luminosité maximale est obtenue pour l'angle des rayons les plus inclinés, de 26,5°. La valeur numérique de $\cos^4(26,5) = (0,89493)^4$ vaut environ 0,64.
En échelles d'indices de lumination : IL = $\log_2(E)$, cela donne $\log_2(0,64) \simeq -0,64$, soit entre un demi cran de diaphragme et un cran de diaphragme pour la perte de lumière dans les coins.

Cette loi en $\cos^4\theta$ s'applique également au sténopé et à un grand nombre d'optiques grand-angulaires quasi-symétriques.

Pour un sténopé ou une optique grand-angulaire obéissant à cette loi en $\cos^4\theta$, et couvrant par exemple un angle de champ de 100°, c'est à dire pour un demi champ de 50°, cette perte de lumière devient considérable : $\cos^4(50) = (0,64279)^4 \simeq 0,17$; en échelle des IL, un facteur 0,17 correspond environ à une perte de deux diaphragmes et demi.

Cette règle en $\cos^4\theta$ s'applique un peu différemment dans le cas des grand-angulaires rétrofocus, pour lesquels les pupilles ne sont pas placées dans les plans principaux ; en première approximation pour un rétrofocus il suffit de mesurer l'angle θ en sortie à partir de la pupille de sortie qui, dans un rétrofocus, est nettement plus éloignée de l'image que le point H'. L'angle θ de la formule photométrique est donc nettement plus petit que celui du demi angle de champ, la perte de lumière est donc nettement moins grande avec un rétrofocus, par comparaison avec une formule quasi-symétrique.

Enfin, dans le cas de certains grand-angulaires quasi-symétrique extrêmes, une conception optique particulière qui induit une *distorsion pupillaire* a pour effet de supprimer l'un des 4 facteurs $\cos\theta$, comme si la pupille d'entrée de l'objectif « tournait » et restait toujours perpendiculaire au rayon moyen. Dans ce cas particulier, on peut avoir une loi d'éclairement en $\cos^3\theta$, à condition que l'objectif soit fermé à son diaphragme de travail f/16 ou f/22.

Des questions ?

— Envoyez à l'auteur un courrier électronique :
`http://bigler.blog.free.fr/public/images/signature-eb-forums.jpg`

— Posez une question sur le forum de galerie-photo.info :
`http://www.galerie-photo.info/forumgp`

version du 17 décembre 2020